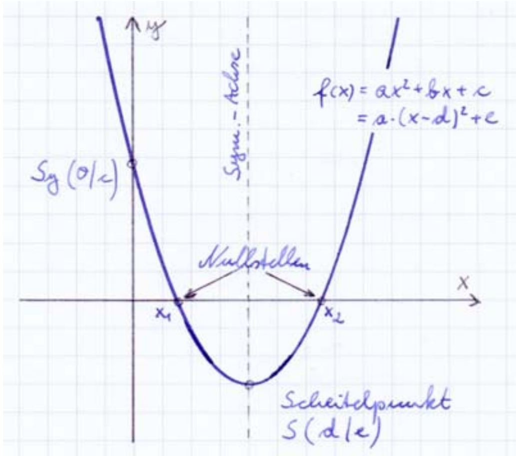
© harald@ziebarth-net.de
☏ (0 22 27) 925 355

Quadratische Funktionen

Zeichnet man eine quadratische Funktion mit einer Wertetabelle, so bekommt man als Grafen immer eine **Parabel**. Die wichtigsten Eigenschaften einer Parabel kann man der nebenstehenden Grafik entnehmen.

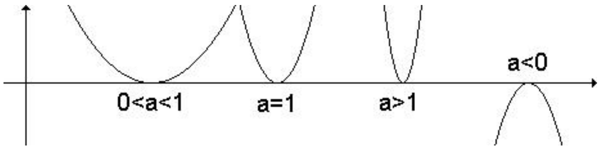
$f(x) = a\,x^2 + b\,x + c$

$a, b, c \in \mathbf{R};\ a \neq 0$



Der Vorfaktor a beschreibt das Öffnungsverhalten der Parabel:
a>0 Parabel ist nach <u>oben</u> geöffnet
a<0 Parabel ist nach <u>unten</u> geöffnet

$\lvert a\rvert=1$	$a=-1 \vee a=+1$		**Normalparabel**
$\lvert a\rvert<1$	$-1<a<0 \vee 0<a<1$		gestaucht
$\lvert a\rvert>1$	$a<-1 \vee a>1$		gestreckt

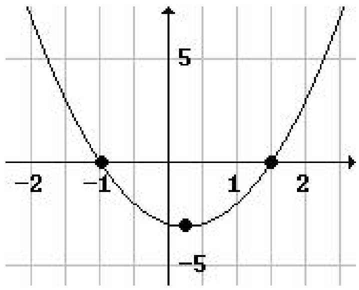


Scheitelpunkt berechnen

Zur Berechnung des Scheitelpunktes einer Parabel überführt man die allgemeine Form mittels „**Quadratischer Ergänzung**" in die Scheitelpunktform.

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$
$$\downarrow$$
quadratische Ergänzung
$$\downarrow$$
$$f(x) = a\cdot(x-d)^2 + e$$
$$\Rightarrow S(d\,|\,e)$$

$$\begin{aligned} f(x) &= 2x^2 - x - 3 \\ &= 2\cdot[x^2 - \tfrac{1}{2}x - \tfrac{3}{2}] \\ &= 2\cdot[\left(x - \tfrac{1}{4}\right)^2 - \tfrac{25}{16}] \\ &= 2\cdot(x - \tfrac{1}{4})^2 - \tfrac{25}{8} \\ &\Rightarrow S(\tfrac{1}{4}\,|\,-\tfrac{25}{8}) \end{aligned}$$



Aufgrund der Lage der Symmetrie-Achse kann man den Scheitelpunkt auch über den Mittelwert der beiden Nullstellen berechnen:
$x_S = \frac{1}{2}\cdot(x_1 + x_2)$

$$f(x) = 2x^2 - x - 3$$
$$\text{NSt.: } 2x^2 - x - 3 = 0$$
$$\ldots$$
$$x_1 = -1 \quad \wedge \quad x_2 = \tfrac{3}{2}$$
$$x_S = \tfrac{1}{2}\cdot(-1 + \tfrac{3}{2}) = \tfrac{1}{4}$$

Den zugehörigen y-Wert erhält man durch Einsetzen des x-Wertes in den Funktionsterm:
$y_S = f(x_S)$

$$y_S = f(\tfrac{1}{4}) = -\tfrac{25}{8} = -3{,}125$$
$$S(\tfrac{1}{4}\,|\,-\tfrac{25}{8}) \approx S(0{,}25\,|\,-3{,}13)$$

Schnittpunkt mit der y-Achse berechnen

Man berechnet den Schnittpunkt mit der y-Achse, indem man für x eine null in den Funktionsterm einsetzt: $S_y(\,0\ |\ f(0)\,)$

Eine quadratische Parabel hat –wie jeder Graf einer Funktion- höchstens einen Schnittpunkt mit der y-Achse. Dieser Schnittpunkt mit der y-Achse wird durch das Absolutglied c des Funktionsterms bestimmt.

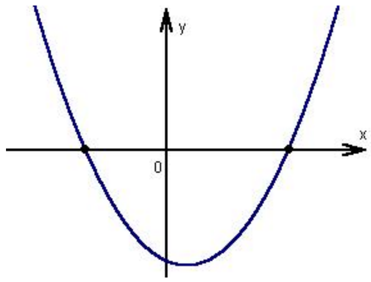
$$f(x) = 2x^2 - 12x + 19$$
$$f(0) = 2\cdot 0^2 - 12\cdot 0 + 19$$
$$f(0) = 19$$
$$\Rightarrow S_y(0\,|\,19)$$

© **harald@ziebarth-net.de**
☏ **(0 22 27) 925 355**

Nullstellen

Die **Nullstellen** einer quadratischen Funktion f(x) sind die x-Koordinaten der gemeinsamen Punkte von Parabel und x-Achse.

Man berechnet die Nullstellen einer quadratischen Funktion, indem man den Funktionsterm gleich null setzt: f(x) = 0.
Die Lösungen der Gleichung a x² + b x + c = 0 erhält man nach Normierung mit der pq-Formel.
Tritt eine Zahl mehrfach als Lösung dieser Gleichung auf, so spricht man von mehrfachen Nullstellen. Die unterschiedliche Häufigkeit der Nullstellen zeigt sich im Grafen:



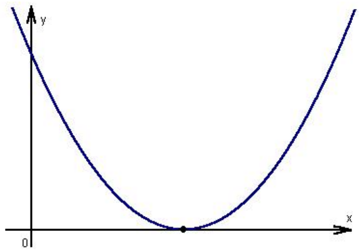
f(x) = 2 x² - x - 3

$$2x^2 - x - 3 = 0 \,|:2$$
$$x^2 - \tfrac{1}{2}x - \tfrac{3}{2} = 0$$
$$x_{1,2} = \tfrac{1}{4} \pm \sqrt{\tfrac{1}{16} + \tfrac{3}{2}}$$
$$= \tfrac{1}{4} \pm \sqrt{\tfrac{25}{16}}$$
$$= \tfrac{1}{4} \pm \tfrac{5}{4}$$
$$x_1 = -1 \quad \wedge \quad x_2 = \tfrac{3}{2}$$

$N_1(-1 \mid 0) \wedge N_2(1{,}5 \mid 0)$

Diskriminante: **D > 0**

zwei verschiedene Nullstellen
= Schnittstellen



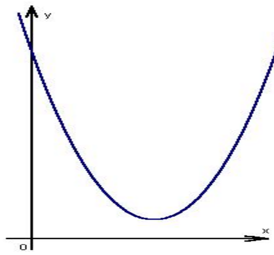
f(x) = x² - 5x + 6,25

$$x^2 - 5x + 6{,}25 = 0$$
$$x^2 - 5x + \tfrac{25}{4} = 0$$
$$x_{1,2} = \tfrac{5}{2} \pm \sqrt{\tfrac{25}{4} - \tfrac{25}{4}}$$
$$= \tfrac{5}{2} \pm \sqrt{0}$$
$$= \tfrac{5}{2} \pm 0$$
$$x_1 = \tfrac{5}{2} \quad \wedge \quad x_2 = \tfrac{5}{2}$$

$N(2{,}5 \mid 0)$

Diskriminante: **D = 0**

eine doppelte Nullstelle
= Berührstelle
= Extremum



f(x) = 4x² - 12x + 10

$$4x^2 - 12x + 10 = 0 \,|:4$$
$$x^2 - 3x + \tfrac{5}{2} = 0$$
$$x_{1,2} = \tfrac{3}{2} \pm \sqrt{\tfrac{9}{4} - \tfrac{5}{2}}$$
$$= \tfrac{3}{2} \pm \sqrt{-\tfrac{1}{4}}$$
$$L = \{\}$$

Diskriminante: **D < 0**

keine Nullstelle

Funktion modellieren

Parabel aus 3 Punkten bestimmen:

$$p: f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$$
$$P_1(2 \mid -4) \in p: \quad a \cdot 2^2 + b \cdot 2 + c = -4$$
$$P_2(-2 \mid -24) \in p: \quad a \cdot (-2)^2 + b \cdot (-2) + c = -24$$
$$P_3(10 \mid -12) \in p: \quad a \cdot 10^2 + b \cdot 10 + c = -12$$

$$\text{LGS lösen}: \quad \begin{aligned} 4a + 2b + c &= -4 \\ 4a - 2b + c &= -24 \\ 100a + 10b + c &= -12 \end{aligned}$$
$$\Rightarrow \quad a = -\tfrac{1}{2} \quad b = 5 \quad c = -12$$

$$p: f(x) = -\tfrac{1}{2} \cdot x^2 + 5 \cdot x - 12$$

Scheitelpunkt und ein weiterer Punkt

$$p: f(x) = a \cdot (x - d)^2 + e$$

$$\underset{d \quad e}{S(3 \mid -1)} \quad \wedge \quad \underset{x \quad y}{P(8 \mid 49)}$$

$$49 = a \cdot (8-3)^2 + (-1) \quad \Rightarrow a = 2$$

$$p: f(x) = 2 \cdot (x-3)^2 - 1$$
$$p: f(x) = 2x^2 - 12x + 17$$

Schnitt- und Berührpunkte zweier Funktionsgrafen

Zur Berechnung gemeinsamer Punkte zweier Funktionsgrafen setzt man die beiden Funktionsterme ineinander ein (f(x) = g(x)), bringt alle Terme auf eine Seite (f(x) – g(x) = 0) und löst diese Gleichung nach x auf.
Mit anderen Worten: die Berechnung von Schnitt- oder Berührstellen ist vergleichbar mit dem Lösen der Gleichung f(x) – g(x) = 0.

$f(x) = 2x^2$
$g(x) = -2x + 24$

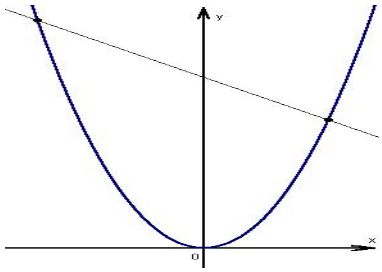
$f(x) - g(x)$
$= 2x^2 - (-2x + 24)$

$2x^2 + 2x - 24 = 0$
…
Schnittstellen:
$x_1 = -4 \quad x_2 = 3$

Die zugehörigen Funktionswerte erhält man durch Einsetzen der Schnittstellen in eine der beiden Funktionsgleichungen (egal welche, warum?):

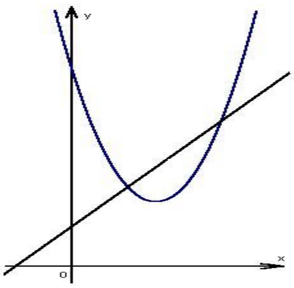
$f(-4) = 32$
=> $S_1(-4 \mid 32)$

$f(3) = 18$
=> $S_2(3 \mid 18)$



Mehrfache Lösungen der Schnittgleichung f(x) – g(x) = 0 sind –analog zu den Überlegungen bei den Nullstellen- als Schnitt- bzw. Berührstellen zu interpretieren:

Relative Lage Parabel - Gerade



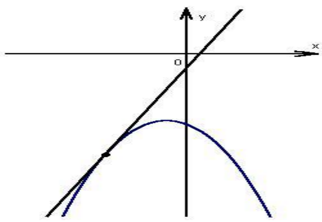
$f(x) = 2x^2 - 9x + 15$
$g(x) = 2x + 3$

$2x^2 - 9x + 15 = 2x + 3$
$2x^2 - 11x + 12 = 0$
$x_1 = 1{,}5 \quad \wedge \quad x_2 = 4$
$y_1 = 6 \quad \wedge \quad y_2 = 11$
$S_1(1{,}5 \mid 6) \quad \wedge \quad S_2(4 \mid 11)$

Diskriminante: **D > 0**

2 Schnittpunkte

g: Sekante



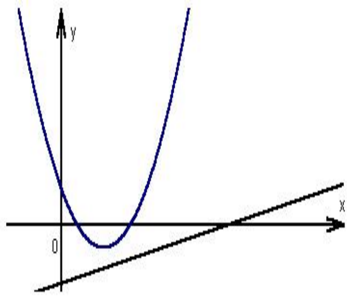
$f(x) = -x^2 - x - 5$
$g(x) = 3x - 1$

$-x^2 - x - 5 = 3x - 1$
$x^2 + 4x + 4 = 0$
$x_1 = -2 \quad \wedge \quad x_2 = -2$
$y = -7$
$BP(-2 \mid -7)$

Diskriminante: **D = 0**

Berührpunkt

g: Tangente



$f(x) = 0{,}2x^2 - 2x + 3$
$g(x) = 0{,}25x - 5$

$0{,}2x^2 - 2x + 3 = 0{,}25x - 5$
$0{,}2x^2 - 2{,}25x + 8 = 0$
$L = \{\}$

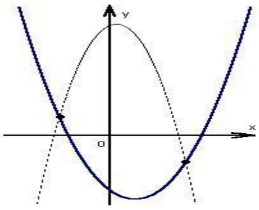
Diskriminante: **D < 0**

kein gemeinsamer Punkt

g: Passante

© harald@ziebarth-net.de
☏ (0 22 27) 925 355

Relative Lage Parabel - Parabel



$p_1(x) = x^2 - 2x - 6$

$p_2(x) = -2x^2 + x + 12$

$x^2 - 2x - 6 = -2x^2 + x + 12$

$3x^2 - 3x - 18 = 0$

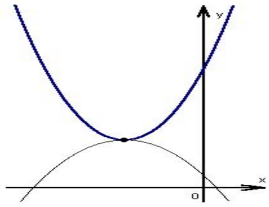
$x_1 = -2 \quad \wedge \quad x_2 = 3$

$y_1 = 2 \quad \wedge \quad y_2 = -3$

$S_1(-2 \mid 2) \quad \wedge \quad S_2(3 \mid -3)$

Diskriminante: **D > 0**

2 Schnittpunkte



$p_1(x) = 2x^2 + 12x + 30$

$p_2(x) = -x^2 - 6x + 3$

$2x^2 + 12x + 30 = -x^2 - 6x + 3$

$3x^2 + 18x + 27 = 0$

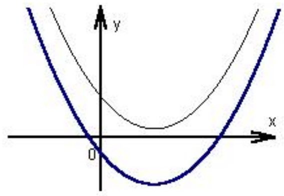
$x_1 = -3 \quad \wedge \quad x_2 = -3$

$y = 12$

$BP(-3 \mid 12)$

Diskriminante: **D = 0**

Berührpunkt



$p_1(x) = x^2 - 4x - 2$

$p_2(x) = x^2 - 4x + 5$

$x^2 - 4x - 2 = x^2 - 4x + 5$

$-2 = 5$

$L = \{\}$

Diskriminante: **D < 0**

kein gemeinsamer Punkt

Tangente anlegen

Lege an die Parabel f(x) = x² - 2x + 5 in x_0=3 eine Tangente an.

1. Berührpunkt

B(3 | f(3)) = B(3 | 8)

$t: y = m \cdot x + b$

$8 = m \cdot 3 + b$

$\Rightarrow b = 8 - 3m$

$t: y = m \cdot x + 8 - 3m$

2. Relative Lage Parabel-Gerade

$f(x) = t(x)$

$x^2 - 2x + 5 = m \cdot x + 8 - 3m$

$x^2 - (m+2) \cdot x + (3m-3) = 0$

$$x_{1,2} = \frac{m+2}{2} \pm \sqrt{\frac{(m+2)^2}{4} - (3m-3)}$$

3. Tangente: Diskrim.=0

$$\frac{(m+2)^2}{4} - (3m-3) = 0$$

$m^2 - 8 \cdot m + 16 = 0$

$m_{1,2} = 4$

$t: y = 4x - 4$

Übungen

p_1: $f(x) = 2x^2 + 8x - 10$	p_4: $f(x) = 4x^2 - 8x - 96$	g_1: $f(x) = 2x + 5$	$P_1(2 \mid 2{,}8)$	$P_4(-4 \mid -6{,}1)$
p_2: $f(x) = -0{,}3x^2 + 1{,}95x - 2{,}25$	p_5: $f(x) = -0{,}5x^2 - 0{,}65$	g_2: $f(x) = \frac{3}{4}x - 3$	$P_2(-1 \mid 9{,}1)$	$S_1(2 \mid 5)$
p_3: $f(x) = 0{,}1x^2 - 0{,}46x + 0{,}529$	p_6: $f(x) = 5x^2 - 3x + 9$	g_3: $f(x) = -4x + 1$	$P_3(1{,}5 \mid 1{,}35)$	$S_2(-3 \mid 2{,}8)$

1. Berechne den Scheitelpunkt, die Nullstellen der Parabeln $p_1,\dots, p_6$ und zeichne die Parabeln mit verschiedenen Farben in ein geeignetes Koordinatensystem.
2. Ermittle die relative Lage je zweier Parabeln $p_1,\dots, p_6$ zueinander.
3. Ermittle die relative Lage je einer Parabeln $p_1,\dots, p_6$ und Gerade $g_1,\dots, g_3$ zueinander.
4. Modelliere aus je 3 Punkten bzw. aus einem Scheitelpunkt und einem weiteren Punkt den Funktionsterm für eine quadratische Funktion.
5. Berechne den Scheitelpunkt und die Nullstellen der Parabeln aus (4).
6. Erstelle in x = -3, -2, 0, 2, 3 je eine Tangente an die Parabeln $p_1,\dots, p_6$.